

無限直積環のイデアルと素イデアルの構造

無限集合 Λ と可換環の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積環 $A = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ におけるイデアルや素イデアルの構造は、成分ごとのイデアルだけでなく、添字集合 Λ 上のフィルター（特にウルトラフィルター）の概念と深く結びついています。

以下にそれぞれの詳細な記述を解説します。

1. A のイデアル全体の集合 $\text{Ideal}(A)$ の記述

無限直積環 A のイデアルは、各成分のイデアルと Λ 上のフィルターを組み合わせることで基本的なクラスを構成できます。ただし、一般の可換環の直積においては、**すべてのイデアルが以下の形で一意かつ単純に記述できるわけではない**（非常に複雑な構造を持つ）点に注意が必要ですが、フィルターを用いた最も自然で重要な構成法は以下のようになります。

フィルターを用いたイデアルの構成:

Λ 上のフィルターを \mathcal{F} とし、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ のイデアルを $I_\lambda \in \text{Ideal}(A_\lambda)$ とします。このとき、 A の部分集合を次のように定義します。

$$I(\mathcal{F}, (I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \{a = (a_\lambda) \in A \mid \{\lambda \in \Lambda \mid a_\lambda \in I_\lambda\} \in \mathcal{F}\}$$

この集合は A のイデアルになります。

- 意味:** 「成分 a_λ が I_λ に属しているような添字 λ の集合が、フィルター \mathcal{F} に属する（= \mathcal{F} の意味で "ほとんどすべて" の成分がイデアルに入っている）」ような元の集まりです。
- 特別なケース:**
 - $\mathcal{F} = \{\Lambda\}$ （自明なフィルター）の場合、これは通常の直積イデアル $\prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ になります。
 - \mathcal{F} が補有限集合（有限集合の補集合）全体からなるフレシェ・フィルターであり、すべての λ で $I_\lambda = \{0\}$ とした場合、直和（有限個の成分を除いて 0 となる元の全体） $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が得られます。

【具体例】フィルターとイデアルの関係

$\Lambda = \mathbb{N}$ （自然数全体）とし、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $A_n = \mathbb{R}[x]$ （実数係数多項式環）とします。直積環 $A = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}[x]$ を考えます。

各成分のイデアルを $I_n = (x^n)$ （ x^n で生成されるイデアル）とします。ここで、フレシェ・フィルター（補有限フィルター） \mathcal{F} を採用します。

このとき作られるイデアル $I(\mathcal{F}, (I_n))$ は、「有限個の例外を除いて、第 n 成分が x^n の倍数になっているような多項式の数列」の全体です。

例えば、数列 $a = (0, x^2, x^3, x^4, \dots)$ は第1成分以外は条件を満たすため、このイデアルに含まれます。

2. $\text{Spec } A$ （素イデアル全体の集合）の記述

直積環 A の素イデアルの構造は、ウルトラフィルターと「超積（Ultraproduct）」を用いることで完全に記述されます。素イデアルの決定には、 Λ 上のウルトラフィルター（極大フィルター）が決定的な役割を果たします。

任意の素イデアル $P \in \text{Spec } A$ は、ある Λ 上のウルトラフィルター \mathcal{U} に付随して定まります。

1. 冪等元を通じたウルトラフィルターの決定:

A は多くの冪等元 ($e^2 = e$ となる元) を持ちます。任意の $S \subset \Lambda$ に対して、指示関数に対応する元 $e_S \in A$ ($\lambda \in S$ なら 1、そうでないなら 0) は冪等元です。

素イデアル P は冪等元について $e_S \in P$ または $1 - e_S \in P$ のいずれか一方のみを満たすため、 P は Λ 上のウルトラフィルター \mathcal{U}_P を一意に定めます。

$$\mathcal{U}_P = \{S \subset \Lambda \mid e_{\Lambda \setminus S} \in P\}$$

2. 超積 (Ultraproduct) を経由した記述:

ウルトラフィルター \mathcal{U} を固定したとき、同値関係 $\sim_{\mathcal{U}}$ を「 $a \sim_{\mathcal{U}} b \iff \{\lambda \mid a_\lambda = b_\lambda\} \in \mathcal{U}$ 」で定義すると、剰余環は超積となります。

$$A_{\mathcal{U}} = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda / \sim_{\mathcal{U}}$$

自然な全射準同型 $\pi_{\mathcal{U}} : A \rightarrow A_{\mathcal{U}}$ が存在します。

結論:

A の任意の素イデアル $P \in \text{Spec } A$ は、あるウルトラフィルター $\mathcal{U} \in \beta\Lambda$ ($\beta\Lambda$ は Λ のストーン・チェフ・コンパクト化、すなわちウルトラフィルター全体の空間) と、超積 $A_{\mathcal{U}}$ の素イデアル $\tilde{P} \in \text{Spec}(A_{\mathcal{U}})$ の組によって、次のように完全に記述されます。

$$P = \pi_{\mathcal{U}}^{-1}(\tilde{P})$$

【具体例】超積と素イデアル

素数全体を Λ とし、各成分を有限体 $A_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とします。直積 $A = \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考えます。

非自明なウルトラフィルター \mathcal{U} (有限集合を含まない極大フィルター) を選びます。

このとき、超積 $A_{\mathcal{U}}$ は標数0の体になります (すべての素数 p について、 $p \cdot 1 = 0$ となる成分は全体の中で「少数派」とみなされ、極限において $p \neq 0$ となるためです)。

体 $A_{\mathcal{U}}$ の素イデアルは $\{0\}$ のみです。したがって、これに対応する A の素イデアルは $P = \pi_{\mathcal{U}}^{-1}(\{0\})$ となり、これは「 \mathcal{U} に属する素数の集合上で成分が 0 になる元の全体」という極大イデアル (かつ素イデアル) を形成します。

3. 各 A_λ が自明な冪等元を持たない場合の $\text{Ideal}(A)$

各成分 A_λ が自明な冪等元 (0 と 1) しか持たない場合 (例えば、整域や局所環の場合)、直積環 $A = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の構造はある程度整理されますが、結論から言えば、環が体でない限りすべてのイデアルをフィルターと成分ごとのイデアルだけで完全に記述することは依然として不可能です。

具体的にどのように整理され、どこに複雑さが残るのかを以下にまとめます。

1. 冪等元とフィルターの完全な対応

各 A_λ が非自明な冪等元を持たないため、 A の冪等元は「各成分が 0 または 1 である元」に限られます。これは Λ の部分集

合の指示関数 e_S ($\lambda \in S$ なら 1、そうでないなら 0) と完全に一致します。

この結果、 A の冪等元によって生成されるイデアル全体の集合は、 Λ 上のフィルター全体の集合と 1 対 1 に対応します。

- フィルター \mathcal{F} に対応するイデアル: $I_{\mathcal{F}} = \langle e_S \mid S \in \mathcal{F} \rangle$

【具体例】 自明な冪等元しか持たないとは

環 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ には $(1, 0)$ という元が存在し、これを2乗しても $(1, 0)$ になるため「非自明な冪等元」が存在します。

一方で、整数環 \mathbb{Z} 単体には、2乗して自分自身になる数は 0 と 1 しかありません。これが「自明な冪等元しか持たない」状態です。

2. 完全な記述が可能なケース：各 A_λ が「体」の場合

もし各 A_λ が自明な冪等元を持たないだけでなく、さらに体であった場合（例: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ）、直積環 A はフォン・ノイマン正則環となり、すべてのイデアルが冪等元で生成されます。

したがってこの特別な場合に限り、 $\text{Ideal}(A)$ は Λ 上のフィルターの集合と完全に同一視でき、イデアルの構造を完全に記述できます。

3. 一般のイデアルに複雑さが残る理由

A_λ が体でない場合（例えば $A_\lambda = \mathbb{Z}$ のような整域）、 $\text{Ideal}(A)$ には成分ごとのイデアルとフィルターの組み合わせだけでは表現できない、無限積特有のイデアルが無数に存在します。

【具体例】 フィルターで記述できないイデアル

直積環 $A = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ （整数列のなす環）を考えます。ここには、各成分のイデアルや単純なフィルターの概念だけでは捉えきれない以下のようなイデアルが存在します。

- 有界な元のイデアル:** 整数列として有界な元（例: すべての成分の絶対値がある定数 M を超えない数列）の全体。これは和や積で閉じておりイデアルになります。
- 増大度に関するイデアル:** 「十分大きな n に対して、第 n 成分が 2^n で割り切れる」ような元の全体。

これらは無限個の成分を横断する「一様性」や「極限的な性質」に依存しており、 A_λ 個別のイデアルの族と Λ 上のフィルターという局所的な情報の集約だけでは捉えきれません。

4. 素イデアル ($\text{Spec } A$) の記述は劇的に単純化される

すべてのイデアルを網羅することは困難ですが、素イデアルに限定すれば、各 A_λ が自明な冪等元を持たないという条件は非常に強力に働きます。

「超積」を明示的に経由する必要がなくなり、任意の素イデアル $P \in \text{Spec } A$ は、あるウルトラフィルター \mathcal{U} と、各成分の素イデアルの族 $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ($P_\lambda \in \text{Spec } A_\lambda$) を用いて、次のように直接的かつ一意に書くことができます。

$$P = \{(a_\lambda) \in A \mid \{\lambda \in \Lambda \mid a_\lambda \in P_\lambda\} \in \mathcal{U}\}$$